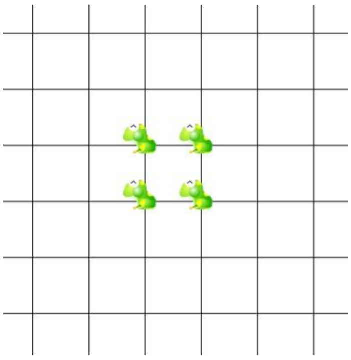
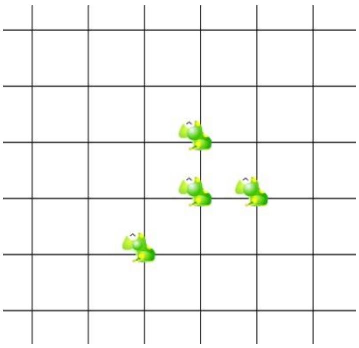
13 陶哲軒的青蛙跳…是幾何嗎？還是代數呢？

青蛙跳遊戲取自陶哲軒十五歲時所寫的一本書《解題 • 成長 • 快樂-陶哲軒教你學數學》。陶哲軒是澳大利亞裔的華人，九歲得國際數學奧林匹克銅牌獎，十歲得銀牌獎，十一歲得金牌獎。陶哲軒更在三十歲時(2006 年)獲得有“數學諾貝爾獎”之稱的“費爾茲獎”，這個獎每四年才頒發一次，且要求得獎者不得超過四十歲。現在就讓我們來欣賞青蛙跳遊戲：在畫有縱橫格線的棋盤上放置四隻青蛙，且四隻青蛙開始的位置剛好圍成一個邊長為 1 的正方格，如下圖所示：



每隻青蛙都可以跳動，而且必須跳過另一隻青蛙，詳細規則及跳動完成規定如下：

每次只有一隻青蛙可以跳動，而且必須越過另一隻青蛙，到達對稱的位置，例如下圖就是右上角的青蛙跳過左下角青蛙的情形。如果縱橫格線的棋盤可以無限延伸，青蛙跳動的次數也沒有受到限制，那麼可以讓四隻青蛙在若干次的跳動之後，其最後的相關位置剛好圍成邊長是 2 的正方形嗎？



這道一人玩的遊戲有兩個困擾需要釐清，否則不容易得到答案：第一個問題是：「這是幾何問題，還是代數問題呢？」第二個問題是：「是有解，還是沒解呢？」想要清楚這兩個問題的答案，最好的方式就是親自動手玩幾次。

陶哲軒只問：「四隻青蛙是否可以跳出邊長是 2 的正方形。」事實上，我們可以進一步探討：「哪些邊長的正方形是四隻青蛙可以跳出來的？」這中間有很大的複雜性，例如，在縱橫格線的棋盤上，邊長為 5 的正方形是可以歪斜的。這是因為勾股定理的關係，例如，座標為(0,0), (4,3), (1,7), (-3,4)的四個點就是邊長為 5 的正方形。

將縱橫格線座標化，且以奇，偶來觀察四隻青蛙所在座標的性質，我們不難發現：這四隻青蛙剛開始的座標分佈剛好為

（偶,偶），（奇,偶），（偶,奇），（奇,奇），

例如，(0,0), (1,0), (0,1),(1,1)就是一組。當青蛙對稱地跳過另一隻青蛙時，這隻青蛙的位移（或者說移動向量）之 x 與 y 座標都增加偶數，這是因為對稱的關係。有了這個觀察，我們不難發現：每次跳動後，青蛙的 x 與 y 座標之奇偶性並沒有改變，例如，座標(0,0)的青蛙跳過座標(1,1)的青蛙之後，其座標變成(2,2)，座標的奇偶性並沒有改變。因此，無論跳動幾次，四隻青蛙所在座標的奇偶性仍為

（偶,偶），（奇,偶），（偶,奇），（奇,奇）。

這樣的奇偶分佈不可能是邊長為 2 的四隻青蛙之分佈（這種情形，四隻青蛙的 x 與 y 座標之奇偶都完全相同），因此，四隻青蛙無論如何跳，都無法跳出邊長為 2 的正方形。